The Mathematics Contest

„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"

15th Edition

CLASA a V-a



1. Un număr natural n dă restul 5 la împărţirea cu 9 şi restul 8 la împărţirea cu 12.

a) Arătaţi că 2012 satisface condiţiile din enunţ şi aflaţi cel mai mic număr natural care îndeplineşte aceste condiţii;

b) Ce resturi obţinem când împărţim numerele $3n$ şi $4n$ la 36?

c) Ce rest se obţine prin împărţirea lui n la 36?

Ina DICU, Cornel MOROTI – Rm. Vâlcea

Barem :

a. $2012 = 9 \cdot 223 + 5,$ $2012 = 12 \cdot 167 + 8$, deci satisface condiţiile din enunţ.....1p

Din t.î.r avem: $n = 9c + 5, n = 12q + 8$

$\Rightarrow n + 4 = 9(c+1)$ şi $n + 4 = 12(q+1)$.....1p

$n \in N$ şi cel mai mic, deci $n + 4 = 36 \Rightarrow n = 32$ 1p

b. $3n = 3(12q + 8) = 36q + 24$

$r_1 < 36 \Rightarrow r_1 = 24$.....1p

$4n = 4(9c + 5) = 36c + 20$

$r_2 < 36 \Rightarrow r_2 = 20$ 1p

c. $n = 4n - 3n = 36c + 20 - 36q - 24 = 36(c-1) - 36q + 36 + 20 - 24 = 36(c - 1 - q) + 32$

Deci restul este 32.....2p

2. Fie a şi b două numere naturale care verifică egalitatea $3ab - a = 2b + 11$.

a) Demonstraţi că numărul b este par;

b) Dacă $ab = 6$, determinaţi valoarea lui a ;

c) Aflaţi numerele a şi b .

Dumitru DOBRE – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Dacă a ar fi par atunci $2b$+11 ar fi par (fals) $\Rightarrow$ a impar..... 1p

$a(3b-1) = 2b + 11$ impar $\Rightarrow$ b par 1p

b) Inlocuind $ab = 6$ în egalitatea dată obţinem a+$2b$ = 7 ..... 1p

Cum b este par $\Rightarrow b \in \{2, 6\}$

Pentru b=6 $\Rightarrow$ a=1, valori ce nu verifica egalitatea din ipoteza

Pentru b=2 $\Rightarrow$ a=3 (convine)..... 1p

c) $3ab - a = 2b + 11 \Leftrightarrow 9ab - 3a = 6b + 33 \Leftrightarrow 3a(3b-1) = 2(3b-1) + 35 \Leftrightarrow$

$(3a-2)(3b-1) = 35$ 1p

Avem:

$\begin{cases} 3a - 2 = 1 \\ 3b - 1 = 35 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = 12$ 0,5p

$\begin{cases} 3a - 2 = 5 \\ 3b - 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow a \notin \mathbf{N}$ 0,5p

$\begin{cases} 3a-2=7 \\ 3b-1=5 \end{cases} \Rightarrow a=3,\ b=2$ 0,5p

$\begin{cases} 3a-2=35 \\ 3b-1=1 \end{cases} \Rightarrow a \notin \mathbf{N}$ 0,5p

3. Fie $A=\{1;2;3;...;12\}$.

a) Determinaţi numărul natural *n,* ştiind că $231n^2 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 12$;

b) Arătaţi că există două mulţimi *B* şi *C*, astfel încât $B \cup C = A, B \cap C = \varnothing$ şi suma elementelor din mulţimea *B* este egală cu suma elementelor din mulţimea *C*;

c) Fie $\overline{CEAS}$ produsul numerelor pare, nedivizibile cu 5 din mulţimea *A*. Numărul $\overline{CEAS}$ se poate transforma succesiv prin următoarele operaţii:

O_1: Mărim două cifre vecine cu 1, cu condiţia ca ambele cifre să fie diferite de 9;

O_2: Micşorăm două cifre vecine cu 1, cu condiţia ca ambele cifre să fie diferite de 0;

O_3: Numărului nou obţinut i se aplică operaţia **O_1** sau **O_2**.

Stabiliţi dacă după mai multe operaţii succesive se poate obţine numărul 2012. Justificaţi!

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) $n^2 = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^2$ ..... 1 p

$n = 2^5\cdot 3^2\cdot 5 = 1440$ ..... 1 p

b) $S_A = 1+2+3+....+12 = 78 \Rightarrow S_B = S_C = 39$ ..... 1 p

De exemplu, $B=\{12;11;10;6\}$ şi $C=\{1;2;3;4;5;7;8;9\}$ 1p

c) $\overline{CEAS} = 4608$ ..... 1 p

Varianta I

Suma cifrelor numărului $\overline{CEAS} = 4608$ este număr par. Prin mărirea sau micşorarea cu 1 a două cifre numărul obţinut după orice transformare are suma cifrelor pară..... 1p

Suma cifrelor lui 2012 este 5, număr impar. Deci nu este posibil. ..... 1 p

Varianta a II-a

$(E+S)-(A+C)=10$

Descăzutul, $E+S$ şi scăzătorul, $A+C$ se măresc sau se micşorează simultan cu o unitate, astfel că diferenţa rămâne egală cu 10, după orice operaţie. ..... 1 p

În cazul numărului 2012, diferenţa $(E+S)-(A+C)=1$. Deci nu este posibil. ..... 1 p

Observaţie:

Se poate soluţiona cerinţa de la c) aplicând criteriul de divizibilitate cu 11.

4. Pe o tablă sunt scrise 2011 cifre de 1, 2012 cifre de 2 şi 2013 cifre de 3. La un pas ştergem două cifre diferite şi scriem în locul lor cifra care este diferită de cele şterse.

a) După câţi paşi este posibil ca pe tablă să rămână scrisă o singură cifră?

b) Dacă după aceşti paşi pe tablă rămâne o singură cifră, care este această cifră?

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) La un pas, numărul de cifre scrise pe tablă scade cu 1, deci după 2011+2012+2013-1 = 6035 paşi.

b) La un pas, numerele 2011 (impar), 2012 (par), 2013 (impar) îşi schimbă paritatea (devin par, impar, par), deoarece ele cresc sau descresc cu 1.

În final, când rămâne un singur număr scris, unul dintre cele trei numere este 1, iar celelalte devin 0, adică cifrele 1 şi 3 sunt în număr de 0, iar cifra 2 una. Deci ultima cifră va fi 2.

The Mathematics Contest

„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"

15th Edition

CLASA a VI-a

2012

1. Dacă x persoane muncesc fiecare câte x ore pe zi, timp de x zile reuşesc să producă x articole. Dacă y oameni muncesc fiecare câte y ore pe zi, timp de y zile, aceştia reuşesc să producă 1 articol. Se cunoaşte că $x>1$.

a) Argumentaţi de ce x nu poate fi nici 30 şi nici 4,5;

b) Determinaţi valoarea lui y;

c) Dacă pentru o oră de lucru o persoană primeşte suma de 20 lei, câţi lei încasează aceasta dacă produce singură un articol ?

Dumitru DOBRE – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Cum x reprezintă numărul de ore lucrate pe zi, avem $x<25$ 1p
Cum x reprezintă numărul de persoane, avem $x\in \mathbf{N}\Rightarrow x\neq 4,5$ 1p

b) x pers ..... x h/zi …… x zile …… x articole

1 pers ..... 1 h/zi …… 1 zi… …… $\frac{1}{x^2}$ articole ……..… 1p

y pers ..... y h/zi …… y zile …… $\frac{y^3}{x^2}$ articole …… 1p

Avem $y^3=x^2$, cu $1<y\leq 24$ avem y = 4 …… 1p

c) Avem x = 8 şi numărul de ore necesar producerii unui articol de către o singură persoană este 64 …… 1p

Suma încasată este de $64\cdot 20=1280$ lei …… 1p

2. Fie A,O,D puncte coliniare în această ordine. În unul din semiplanele determinate de dreapta AD considerăm semidreptele $[OB$ şi $[OC$, astfel încât $[OC\subset Int(\sphericalangle AOB)$.

Se ştie că $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)}=\frac{a}{b}$ şi $\frac{m(\sphericalangle BOC)}{m(\sphericalangle COD)}=\frac{b}{c}$

a) Exprimaţi în funcţie de a,b şi c, raportul $\frac{m(\sphericalangle AOC)}{m(\sphericalangle BOD)}$;

b) Dacă a,b,c sunt numere naturale prime ce verifică relaţia $15a+7b+3c=117$, iar $[OX$ şi $[OY$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv $\sphericalangle COD$, aflaţi $m(\sphericalangle XOY)$.

Leon GENOIU, Marius GIURGIU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Din $\frac{m(\angle AOB)}{m(\angle BOC)}=\frac{a}{b}\Rightarrow \frac{m(AOC)}{m(\angle BOC)}=\frac{a-b}{b}(I)$ 0,5p

$Din\ \frac{m(\angle BOC)}{m(\angle COD)}=\frac{b}{c}\Rightarrow \frac{m(BOC)}{m(\angle BOD)}=\frac{b}{c-b}(II)$ 0,5p

Din relaţiile (I) şi (II) deducem că $\frac{m(\angle AOC)}{m(\angle BOD}=\frac{a-b}{c-b}$.....1p

b)Arată că $7b\vdots 3\Rightarrow$ b=3.....1p

Găseşte: a=3, b=3, c=17 şi a=5, b=3, c=7,.....1,5p

Cum $m(\angle AOB) > m(\angle BOC) \Rightarrow a > b \Rightarrow (a,b,c)=(5,3,7)$…….0,5p

Deci, $\frac{m(\angle AOB)}{5} = \frac{m(\angle BOC)}{3} = \frac{m(\angle COD)}{7} = k, k>0$…… ……0,5p

Află $k=20^0$ 1p

$m(\angle XOY) = 60^0$ 0,5p

3. a) Demonstraţi că restul împărţirii unui număr natural nenul la 9 este egal cu restul împărţirii sumei cifrelor numărului respectiv la 9.

b) Fie numărul $a = 2012^{2012}$. Calculăm suma cifrelor numărului *a*, apoi calculăm suma cifrelor sumei obţinute şi aşa mai departe până obţinem o singură cifră. Care este această cifră?

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Dacă $x = \overline{abcd} = d + 10c + 100b + 1000a = (a+b+c+d) + 9c + 99b + 999a =$

$= (a+b+c+d) + M_9 \Rightarrow \overline{abcd} - (a+b+c+d) = M_9 \Rightarrow q.e.d.$

b) Invariantul este restul împărţirii numărului *a* la 9, pentru că el este acelaşi pentru *a* şi pentru suma cifrelor, adică când suma rămâne o sinură cifră, ea are acelaşi rest la impărţirea cu 9 ca numărul iniţial *a*.

Dar $a = 2012^{2012} = (M_9 + 5)^{2012} = M_9 + 5^{2012} = M_9 + \left(5^4\right)^{503} = M_9 + (M_9 + 4)^{503} = M_9 + M_9 + 4^{503} =$

$= M_9 + 4^{501} \cdot 4^2 = M_9 + \left(4^3\right)^{167} \cdot 16 = M_9 + 64^{167} \cdot 16 = M_9 + (M_9 + 1)^{167} \cdot 16 = M_9 + (M_9 + 1) \cdot 16 = M_9 + 7$

Deci ultima cifră este 7.

4. Triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$ cu $m(\sphericalangle A) > 90^o$. Fie FD şi GE mediatoarele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ cu $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$, F şi G$\in BC$, iar $DF \cap GE = \{H\}$. Fie T mijlocul laturii $[BC]$. Arătaţi că:

a) ΔHDE este isoscel;

b) $HT \perp BC$;

c) HT este mediatoarea segmentului $[DE]$.

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) $[AD] \equiv [AE]$... …….... 1 p

$\Delta DAH \equiv \Delta EAH\ (I.C.)$ ……..…… 1 p

$[HD] \equiv [HE] \Rightarrow \Delta HDE$ este isoscel de bază $[DE]$…… 1 p

b) FD şi GE sunt mediatoare în ΔABC, iar $FD \cap GE = \{H\} \Rightarrow H$ este centul cercului circumscris $\Delta - lui\ ABC$ ……..... 1 p

H este centul cercului circumscris $\Delta - lui\ ABC$ şi T este mijlocul laturii $[BC] \Rightarrow HT$ este mediatoare în $\Delta ABC \Rightarrow HT \perp BC$ …… 1 p

c) $\Delta HDT \equiv \Delta HET\ (L.U.L.)$ ……..……..…… 1 p

$$\left.\begin{array}{l} HD = HE \Rightarrow d(H;D) = d(H;E) \\ TD = TE \Rightarrow d(T;D) = d(T;E) \end{array}\right\} \Rightarrow HT \text{ este mediatoarea segmentului } [DE] \Rightarrow HT \perp DE$$

..... 1 p

Observaţie:

Pentru cei ce au studiat proprietăţile $\Delta - lui$ isoscel există şi alte soluţii ce se punctează corespunzător!

The Mathematics Contest

„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"

15th Edition

CLASA a VII-a

1. a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x(x+5)=84$.

b) Avem un pătrat care este împărţit în 5 patrulatere cu interioarele disjuncte: 4 dreptunghiuri având aceleaşi dimensiuni şi un pătrat mic. Dacă se ştie că aria pătratului mic este egală cu 25, iar aria fiecărui dreptunghi este egală cu 84, aflaţi perimetrul pătratului iniţial şi realizaţi un desen care să arate modul de împărţire a pătratului iniţial.

Marcel TELEUCĂ – Chişinău

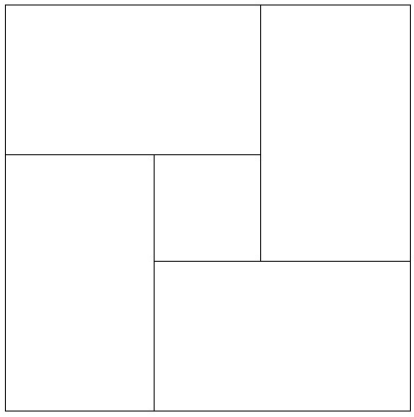
BAREM:

a) $x(x+5)=84 \Rightarrow x^2+12x-7x-84=0 \Rightarrow x(x+12)-7(x+12)=0 \Rightarrow (x+12)(x-7)=0$

Deci $x\in\{7;-12\}$

b) Aria totală va fi $84\cdot 4+25=361=l^2 \Rightarrow l=19 \Rightarrow P=19\cdot 4=76$

Împărţirea va fi următoarea:



2. Fie triunghiul ABC cu $AD\perp BC, D\in(BC)$ şi propoziţiile:

P1: AB = AC

P2: AB – BD = AC – CD

P3: AB + BD = AC + CD

Demonstraţi că:

a) $P_1 \Rightarrow P_2$; ***b)*** $P_2 \Rightarrow P_3$; ***c)*** $P_3 \Rightarrow P_1$;

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) AB = AC şi $AD\perp BC \Rightarrow BD=CD \Rightarrow AB-BD=AC-CD$

b) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile ADB şi ADC obţinem: $AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-CD^2=(AB+BD)(AB-BD)=(AC-CD)(AC+CD)$

Conform a) $AB-BD=AC-CD>0$

Deci $AB+BD=AC+CD$

c) Construim segmentele $[BE]\equiv[CF]$ pe dreapta BC (ordinea punctelor este E, B, D, C, F.)

Cum $AB+BD=AC+CD \Rightarrow DE=DF \Rightarrow$ dreapta AD este mediatoarea segmentului $[EF]$

Deci $AE=AF \Rightarrow m(\sphericalangle E)=m(\sphericalangle F)=\alpha \Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle ACB)=2\alpha$ (unghi exterior)

Deci AB=AC.

3. Fie şirul de numere $n, n+1, n+2, ..., n^2$, unde *n* este număr natural nenul.

a) Pentru $n = 5$ daţi exemplu de patru numere *a*, *b*, *c*, *d* din şir astfel încât $ab = cd$;

b) Ştiind că pentru $n \geq 6$ există patru numere *a*, *b*, *c*, *d* din şir astfel încât $ab = cd$, daţi un exemplu de astfel de numere.

c) Pentru ce valori ale lui *n* există patru numere *a*, *b*, *c*, *d* din şir, astfel încât $ab = cd$?

Marcel TELEUCĂ – Chişinău

BAREM:

a) De exemplu $a = 6, b = 10, c = 12, d = 5$.

b) De exemplu $a = n, b = 6n, c = 2n, d = 3n$. Cum $n \geq 6 \Rightarrow n^2 \geq 6n$, deci numărul *6n* aparţine şirului

c) Conform b) există soluţie pentru $n \geq 6$. Rămân de verificat cazurile *n≤5:* pentru n=5 avem 5,...,25 şi numere pot fi alese luînd produsul $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ şi despărţindu-l în perechi $2 \cdot 3 = 6$ şi $4 \cdot 5 = 20$, şi $2 \cdot 4 = 8$ şi $3 \cdot 5 = 15$, deci numerele pot fi a=6, b=20; c=8, d=15. Pentru n=4 avem perechile a=6, b=10; c=4, d=15. Pentru n=3 avem a=3, b=8, c=4, d=6. Pentru cazurile n=1 şi n=2 nu există soluţii. Deci, pentru orice n≥3 condiţia problemei va fi îndeplinită.

4. Se consideră un triunghi ABC şi $EF \| BC, E \in (AB), F \in (AC)$ şi punctul $M \in (EF)$ oarecare. Se ştie că $BM \cap AC = \{B'\}$ şi $CM \cap AB = \{C'\}$.

a) Să se arate că $AE \cdot BC = AB \cdot EF$;

b) Demonstraţi că $S_{\Delta AB'C'} = 3S_{\Delta MB'C'} \Leftrightarrow G \in (EF)$, unde *G* este centrul de greutate al triunghiului ABC. Prin $S_{\Delta XYZ}$ se înţelege aria triunghiului XYZ.

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Cum EF şi BC sunt drepte paralele, conform teoremei fundamentale a asemănării avem $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow AE \cdot BC = AB \cdot EF$.

b) $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AC' \cdot AB'}{AB \cdot AC}$ (1)

$\frac{S_{\Delta MB'C'}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{MC' \cdot MB'}{MB \cdot MC}$ (2)

Conform teoremei lui Menelaus în $\Delta MB'C$ cu transversal A, C', B avem că

$\frac{AB'}{AC} \cdot \frac{CC'}{C'M} \cdot \frac{BM}{BB'} = 1$ (3)

Conform teoremei lui Menelaus în $\Delta MC'B$ cu transversal A, B', C avem că

$\frac{AC'}{AB} \cdot \frac{BB'}{B'M} \cdot \frac{CM}{CC'} = 1$ (4)

Deci $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AC' \cdot AB'}{AB \cdot AC} = \frac{B'M \cdot CC'}{BB' \cdot CM} \cdot \frac{C'M \cdot BB'}{CC' \cdot BM} = \frac{B'M \cdot C'M}{CM \cdot BM} = \frac{S_{\Delta MB'C'}}{S_{\Delta MBC}}$

Deci $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta MB'C'}}{S_{\Delta MBC}}$ (5)

"$\Rightarrow$" Dacă $S_{\Delta AB'C'} = 3S_{\Delta MB'C'} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{d(M, BC)}{d(A, BC)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G \in [EF]$

"$\Leftarrow$" Dacă $G \in [EF] \Rightarrow \frac{d(M, BC)}{d(A, BC)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\Delta AB'C'} = 3S_{\Delta MB'C'}$



The Mathematics Contest
„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
15th Edition
CLASA a VIII-a



1. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $x(x+4)(x+8)(x+12)=3465$

Alexandru UNGUREANU – Rm. Vâlcea

BAREM:

$x(x+4)(x+8)(x+12)=(x^2+12x)(x^2+12x+32)=(x^2+12x+16-16)(x^2+12x+16+16)=$

$=\left(x^2+12x+16\right)^2-16^2=3465\Rightarrow\left(x^2+12x+16\right)^2=3721=61^2\Rightarrow\left(x^2+12x+16\right)=61$ sau

$\left(-x^2-12x-16\right)=61$

CAZUL I: $\left(x^2+12x+16\right)=61\Rightarrow x^2+12x-45=0\Leftrightarrow(x-3)(x+15)=0\Rightarrow x\in\{-15;3\}$

CAZUL II:

$\left(-x^2-12x-16\right)=61\Leftrightarrow x^2+12x+77=0\Leftrightarrow x^2+12x+36+41=0\Leftrightarrow\left(x+6\right)^2+41=0$ (1)

$\forall x\Rightarrow\left(x+6\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(x+6\right)^2+41\geq 41$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă contradicţie, deci singurele soluţii ale ecuaţiei sunt *x=3* şi *x=-15* .

2. a) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$, demonstraţi inegalitatea $a+b+c\leq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$;

b) Fiind date numerele $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=p$, să se demonstreze inegalitatea $ax+by+cz\leq p.$

c) Fie $a,b,c\in\mathbb{R},$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$. Arătaţi că există $x,y,z\in\mathbb{Z}$, nu toate nule, cu modulele strict mai mici decât 3, astfel încât $\left|xa+yb+zc\right|\leq\frac{\sqrt{3}}{13}$.

Prelucrat de Vasile GORGOTĂ – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea şi obţinem:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.....1punct$$

Inmulţind cu 2 şi formând pătrate perfecte, obţinem

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$$

cu egalitate dacă şi numai dacă *a=b=c* .....2 puncte.

b) Considerăm $(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\geq 0$ 1punct

de unde prin ridicare la pătrat şi folosind ipoteza rezultă ceea ce trebuia demonstrat.....1punct

c)Considerând sumele $S=ma+nb+pc$ cu $m,n,p\in\{0,1,2\}$ în număr de 27 avem

$$\left|ma+nb+pc\right|\leq 2\left(\left|a\right|+\left|b\right|+\left|c\right|\right)\leq 2\sqrt{3}$$

Deci $\left|S\right|\in\left[0,2\sqrt{3}\right]$ pe care-l împărţim în 26 de intervale de lungimi $\frac{2\sqrt{3}}{26}=\frac{\sqrt{3}}{13}$.Cum avem 26 de intervale şi 27 de sume vor exista două sume ce aparţin aceluiaşi interval,deci diferenţa lor, în modul, este mai mică decât lungimea intervalului.

$$\left|m_1a+n_1b+p_1c-m_2a-n_2b-p_2c\right|\le\frac{\sqrt{3}}{13}$$

Notând $x=m_1-m_2, y=n_1-n_2, z=p_1-p_2$ obţinem ceea ce se cerea demonstrat.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=12\,cm.$ Pe muchiile $[AA']$, respectiv, $[CC']$ se iau punctele $E,$ respectiv, $F,$ astfel încât $[D'E]\equiv[D'F]$.

a) Dacă $D'E=12\sqrt{2}\,cm,$ să se afle distanţa de la D' la EF.

b) Dacă $D'E=4\sqrt{13}\,cm,$ să se afle forma şi perimetrul secţiunii determinate de planul $(D'EF)$.

Ştefan SMĂRĂNDOIU – Rm. Vâlcea

BAREM:

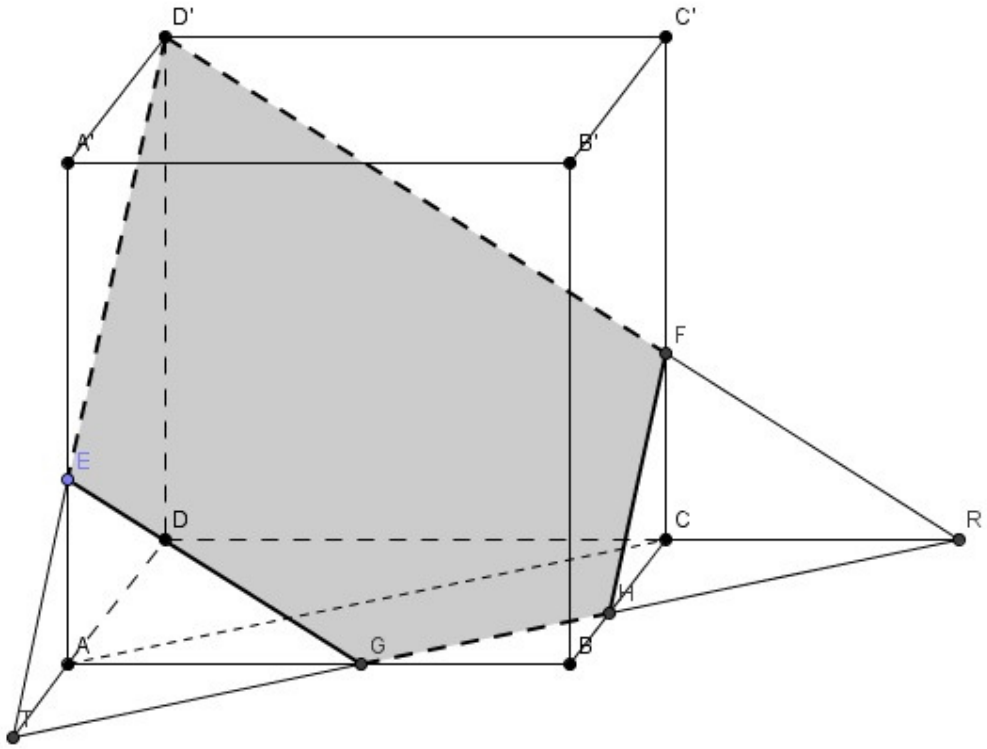
a) E coincide cu A şi F coincide cu C ..... (1p)

$\Delta D'EC$ e echilateral de latură $12\sqrt{2}cm$ ..... (1p)

$d(D',EF)=d(D',AC)=\dfrac{12\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}cm=6\sqrt{6}cm$ ..... (1p)

b) Secţiunea este pentagonul $D'EGHF$ ..... (2p)

Unde $D'E\cap AD=\{T\}, D'F\cap DC=\{R\}, TR\cap BC=\{H\}, TR\cap AB=\{G\}$



$EG=FH=2\sqrt{13}cm$ ..... (1p)

$P_{D'EGHF}=12\sqrt{13}+6\sqrt{2}cm$ ..... (1p)

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă unde $ABCD$ este patrulater convex. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, punctul $I \in (OD'), CI \cap (ADD') = \{M\}$, $AI \cap (CDD') = \{N\}, J \in (OC')$, $BJ \cap (CDD') = \{E\}$, $DJ \cap (BCC') = \{F\}$, demonstraţi că:

a) $A'D' \| (DOC)$;

b) Dreptele *MN* şi *EF* sunt paralele cu planul $(A'B'C') \Leftrightarrow ABCDA'B'C'D'$ e paralelipiped.

Constantin BĂRĂSCU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) $A'D' \| AD, AD \subset (DOC), A'D' \not\subset (DOC) \Rightarrow A'D' \| (DOC)$

b) $" \Rightarrow "$

$M \in (AD')$ şi $N \in (CD')$. Dacă $MN \| (A'B'C') \Rightarrow MN \| (ABC) \Rightarrow MN \| AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{NC}{ND'} = \frac{MA}{MD'}$

Dar în $\Delta ACD'$ cevienele $D'O, AN, CM$ sunt concurente, deci, aplicând teorema lui Ceva obţinem: $\frac{AO}{OC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{MD'}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{OA}{OC} = 1 \Rightarrow OA = OC$

Analog dacă $EF \| BD \Rightarrow OB = OD$

Deci ABCD este parallelogram, rezultă că $ABCDA'B'C'D'$ e paralelipiped.

$" \Leftarrow "$

Dacă $ABCDA'B'C'D'$ e paralelipiped rezultă că ABCD e paralelogram, de unde rezultă că AO=OC şi OB=OD.

Dar în $\Delta ACD'$ cevienele $D'O, AN, CM$ sunt concurente, deci, aplicând teorema lui Ceva obţinem: $\frac{AO}{OC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{MD'}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{NC}{ND'} = \frac{MA}{MD}$, de unde rezultă prin reciproca teoremei lui Thales că $MN \| AC \Rightarrow MN \| (A'B'C')$

Analog se demonstrează că $EF \| (A'B'C')$

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15th Edition 24.03.2012
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a V-a

Subiectul I

1. $A=\overline{a_1a_2a_3.....a_{2012}}$; $a_1+a_2+a_3+.....+a_{2012}=2011$.
$a_1a_2a_3\cdot.....\cdot a_{2012}=?$

A) 2012 B) 0 C) 10000 D) $2011\cdot 1006$ E) 2011

Prof. Gabriela Ene , I.S.J. Vâlcea

Soluţie:
$a_1+a_2+a_3+.....+a_{2012}=2011\Rightarrow \exists a_k=0;1\le k\le 2012\Rightarrow a_1a_2a_3\cdot.....\cdot a_{2012}=0$

2. $A=16^{500}\cdot 625^{501}=\overline{a_1a_2...a_n}$. n = ?

A) 2003 B) 2012 C) 2004 D) 2002 E) 2011

Prof. Cătălin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:
$A=16^{500}\cdot 625^{501}=625\cdot(16\cdot 625)^{500}=625\cdot 10000^{500}=625\cdot(10^4)^{500}=625\cdot 10^{2000}=625\underbrace{00...0}_{2000}$

→ A are 2003 cifre.

3. $A=\{\overline{abcd}\mid abcd=105\}$. Card A = ?

a) 42 b) 6 c) 24 d) 12 e) 50

Prof. Alin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:
abcd=105=1·3·5·7. Card A = 4! = 24.

Subiectul II

4. $(a_n)_n\in N^*$: 2 ; 5 ; 9 ; 14 ; 20 ;……; a_{17} ; .... **a_{17} = ?**

A) 152 B) 189 C) 160 D) 170 E) 185

Prof. Gabriela Vărzaru, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $a_n=2+3+4+5+...+n+(n+1)=(n+1)(n+2):2-1$; $a_{17}=18\cdot 19:2-1=170$.

5.

$2012 \cdot \underbrace{111...111}_{2011 cifre} = x; x = \overline{a_1 a_2 ... a_k}$

$S = a_1 + a_2 + ... + a_k .$ $S = ?$

A) 10 055 B) 8040 C) 8048 D) 2012 E) 10 060

Prof. Cristina Pîrvuţă, Şcoala Nr. 10 , Rm. Vâlcea

Soluţie:

$2012 \cdot \underbrace{111...111}_{2011 cifre} = x = (2000+10+2) \cdot \underbrace{11...1}_{2011} = 2000 \cdot \underbrace{11...1}_{2011} + 10 \cdot \underbrace{11...1}_{2011} + 2 \cdot \underbrace{11...1}_{2011} =$

$\underbrace{22...2}_{2011}000 + \underbrace{11...}_{2011}10 + \underbrace{22...2}_{2011} = \underbrace{22355...55332}_{2014}.$

$S = 2+2+3+5 \cdot 2008 + 3 + 3 + 2 = 10055.$

6. a,b,c∈ N; ab + ac = 16 ; ac + bc=25 ; c-a = 3 b =?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 3

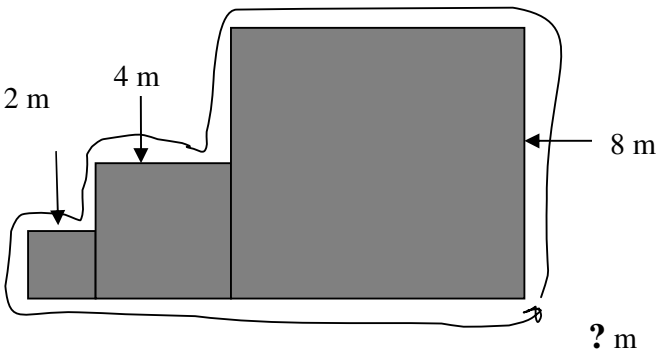
Prof. Pîslaru Anca , CN "Mircea cel Bătrân" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

Din relaţia ac+bc=25 scădem relaţia ab+ac=16 şi obţinem: b(c-a)=9 ⇔ 3b=9 ⇔ b=3.

Subiectul III

7.



A) 44 m ; B) 40 m ; C)48 m; D) 50 m; E)46 m.

Prof. Alin Badea, CNI "*Matei Basarab*", Rm. Vâlcea

Soluţie: Perimetrul=(8+8+4+4+2+2+2+2+4+8)m=44m

8.

20	a	b	c	12

a,b,c∈ N; 20ac=4 760 ; 12bc=2 520. a + b + c =?

A) 44 B) 45 C) 48 D) 50 E) 46

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

ac=238; bc=210 şi 20>a>b>c>12 ⇔ ac=2· 7· 17; bc=2· 3· 5· 7 şi 20>a>b>c>12 → a=17; b=15; c=14.

9. $1225:\left[(13\cdot x-30):3-10\right]=7$

A) 40 B) 55 C) 45 D) 50 E) 46

Prof. Marcel Giurgiulescu , Şc. „Take Ionescu", Rm. Vâlcea

Soluţie:

$\left[(13\cdot x-30):3-10\right]=1225:7 \Leftrightarrow (13\cdot x-30):3-10=175 \Leftrightarrow (13\cdot x-30):3=175+10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (13x-30):3=185 \Leftrightarrow 13x-30=185\cdot 3 \Leftrightarrow 13x-30=555 \Leftrightarrow 13x=555+30 \Leftrightarrow$

$13x=585 \Leftrightarrow x=45.$

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15th Edition 24.03.2012
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a VI-a

1.

$1,11(36)=\frac{m}{n}$, m,n∈ N*, (m;n)=1 . m+n=?

A) 84 B) 75 C) 101 D) 93 E) 69

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $1,11(36)=\frac{11136-111}{9900}=\frac{11025}{9900}=\frac{49}{44}=\frac{m}{n};(49;44)=1\Rightarrow 49+44=93$

2.

$a=3^{2012},n\in N$; $b=2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot 200$; $(a,b)=3^n$.

n=?

A) 48 B) 46 C) 50 D) 47 E) 44

Elev Ungureanu Alexandru, CN "Alexandru Lahovari" , Rm. Vâlcea

Soluţie: b = $2^{100}\cdot 100!$. $k=\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]+....=33+11+3+1+0+...=48$.

3^{48}divide pe b şi 3^{49} nu divide pe b, prin urmare n=48.

3.

$\frac{x}{x+1}=\frac{y}{y+2}=\frac{z}{z+3}=\frac{2}{3}$; x + y + z = ?

A) 6 B) 10 C) 12 D) 2 E) 4

Prof. Ion Stănciulescu , Şc. „Take Ionescu", Rm. Vâlcea

Soluţie: Scădem din numitori numărătorii şi obţinem:

$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{31}=2\Rightarrow x=2;y=4;z=6\Rightarrow x+y+z=12$

Subiectul II

4. $a,b \in N^*; [a,b] = 2012; a \cdot b = 1006^2$. (a,b) = ?

A) 305 B) 4 C) 1006 D) 503 E) 212

Prof. Constantin Popescu , Şc. „Take Ionescu" , Rm. Vâlcea

Soluţie: [a;b] · (a;b) = a · b $\Leftrightarrow$ (a;b) = $1006^2 : 2012 = 503$.

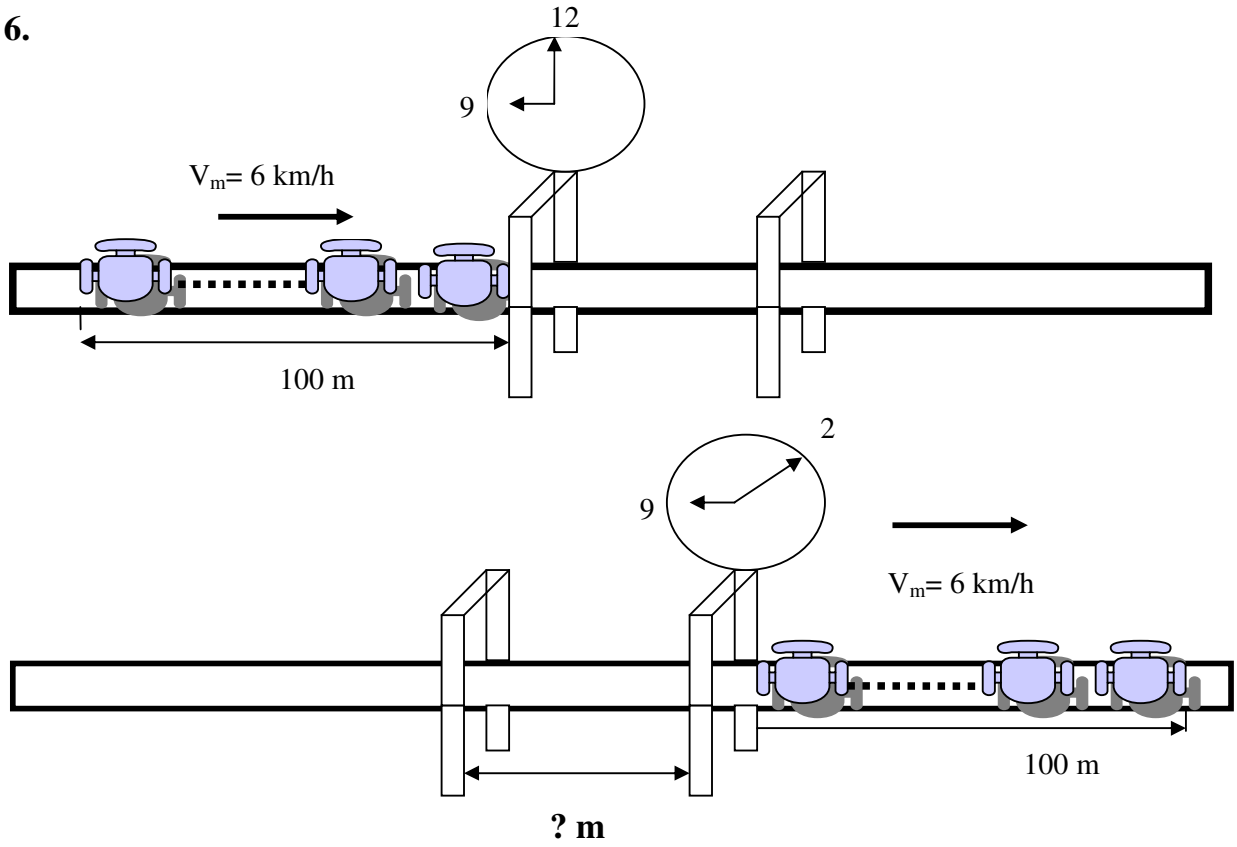
5. $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}$; $y = \frac{5}{2}+\frac{8}{3}+\frac{11}{4}+...+\frac{6032}{2011}+\frac{6035}{2012}$; $x+y=?$

A) 6036 B) 4024 C) 2012 D) 6066 E) 6033

Prof. Mazilu Marin , CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $x+y = \frac{6}{2}+\frac{9}{3}+\frac{12}{4}+.....+\frac{6036}{2012} = \underbrace{3+3+3+....+3}_{2011 \text{ termeni}} = 3 \cdot 2011 = 6033.$

6.



A) 1000 m B) 950 m C) 900 m D) 1200 m E) 600m

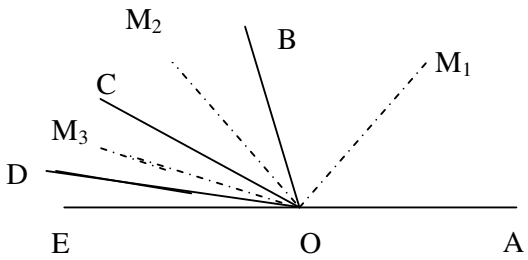
Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $v = \frac{6km}{1h} = \frac{6000m}{3600s} = \frac{5}{3} m/s;$ $t = 10\min = 600s;$ $d = v \cdot t = \frac{5}{3} m/s \cdot 600s = 1000m$

Lungimea podului = 1000m – 100m = 900m.

Subiectul III

7.



$\angle AOM_1 \equiv \angle M_1OB \equiv \angle BOC$
$\angle BOM_2 \equiv \angle M_2OC \equiv \angle COD$
$\angle COM_3 \equiv \angle M_3OD \equiv \angle DOE$

$m(\angle M_1OM_3) = ?^0$

A) 100^0 B) 88^0 C) 104^0 D) 108^0 E) 105^0

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:
$m(\angle COM_3) \equiv m(\angle M_3OD) \equiv m(\angle DOE)=x^0$; $m(\angle BOM_2) \equiv m(\angle M_2OC) \equiv m(\angle COD)=2x^0$;
$m(\angle AOM_1) \equiv m(\angle M_1OB) \equiv m(\angle BOC)=4x^0 \rightarrow m(\angle AOE)=15x^0=180^0 \rightarrow x=12 \rightarrow m(\angle M_1OM_3)=108^0$

8.

$a,b,c \in N^*$, $\frac{a+b+c}{3}=16$, $ab+bc+ac=747$.

$a^2+b^2+c^2=?$

A) 684; B) 1047 ; C) 810; D) 920; E) 984

Prof. Gabriela Cocoş, CNI "Matei Basarab", Rm. Vâlcea

Soluţie:
a+b+c=48. Înmulţim succesiv relaţia cu a, b şi c, apoi adunăm relaţiile obţinute şi obţinem:
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)= 48(a+b+c) \rightarrow a^2+b^2+c^2=48^2-2\cdot747= 810$.

9.

A = {0, 11, 22, 33, ..., 2013}; B = {2, 4, 6, ... , 2300}.

$\frac{CardA}{CardB}=p\%$.

p=?

A) 2,5 B) 16 C) 20 D) 15 E) 120

Prof. Mariana Saraolu , Şc. „Take Ionescu" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

$\frac{CardA}{CardB}=\frac{184}{1150}=\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=16\%$.

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15^{th} Edition 24.03.2012
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a VII-a

Subiectul I

1. $S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{100\cdot 103}$; S = ?

A) $\frac{33}{103}$; B) $\frac{30}{103}$ C) $\frac{33}{102}$ D) 1 E) $\frac{34}{103}$

Prof. Badea Aurel, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+.....+\frac{1}{100}-\frac{1}{103}\right)==\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{103}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{102}{103}=\frac{34}{103}.$

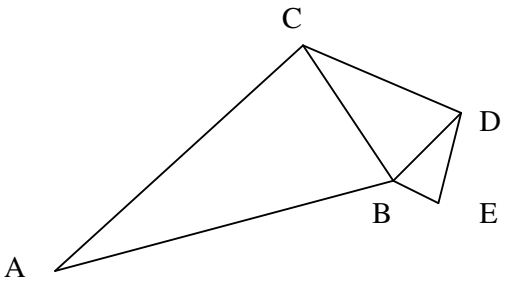
2. $\frac{111}{78}=\overline{1,a_0a_1a_2.....a_{2012}...};$ $a_{2012}=?$

A) 6 B) 3 C) 2 D) 7 E) 9

Prof. Badea Alin, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $\frac{111}{78}=\frac{37}{26}=1,4(230769);$ $(2013-1):6=2012:6=335 rest 2\Rightarrow a_{2012}=3$

3. $\angle BAC\equiv\angle BCD\equiv\angle BDE=30^0$.
[AB] ≡ [AC] ; [BC] ≡ [CD]; [BD] ≡ [DE].
$\frac{AB}{BE}=?$



A) $\frac{5BC}{2DB}$; B) $\frac{BC}{BD}$; C) $\left(\frac{BC}{BD}\right)^3$; D) $\frac{4BC}{3BD}$; E) $\left(\frac{BC}{BD}\right)^2$

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: Δ ABC ~ Δ CBD ~ Δ DBE $\Rightarrow \frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE};\frac{BD}{BE}=\frac{BC}{BD}$. Înmulţim relaţiile şi obţinem:

$\frac{AB}{BE}=\frac{BC^2}{BE\cdot BD}=\frac{BC^3}{BE\cdot BD\cdot BC}=\frac{BC^3}{BD\cdot BD^2}=\left(\frac{BC}{BD}\right)^3.$

Subiectul II

4. a >0 , b>0, c>0 ; a(b+c) = 2011; b(a+c) = 2012 ; c(a+b) = 2013

$(abc)^2$ = ?

A) 2010·2011·2012 B) 1005·1006·1007 C) 2011·2012·2013 D) 1004·1005·1006 E) 1005^3

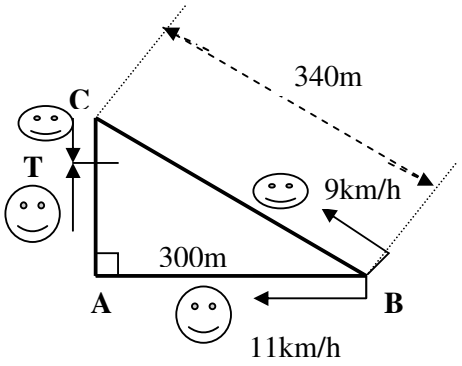
Prof. Cătălin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

Adunăm relaţiile şi obţinem: ab+bc+ac=3018. Din această relaţie scădem, pe rând, relaţiile date şi obţinem: bc=1007; ac=1006; ab=1005.Înmulţim şi obţinem: $(abc)^2$= 1005.1006.1007.

5.

AT=? m



A) 150 B) 162 C) 135 D) 140 E) 22

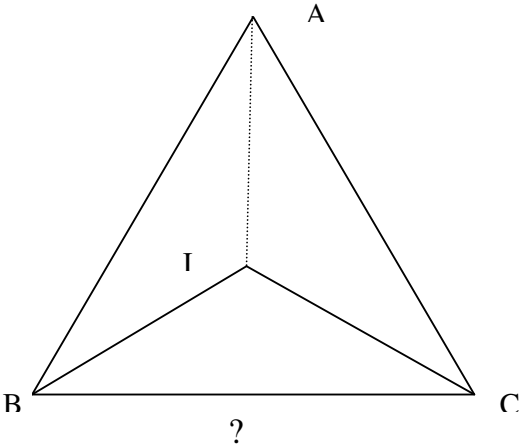
Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

AC=160m; v_1+v_2=20km/h=$\frac{50}{9}$ m/s; 800m:$\frac{50}{9}$ m/s=144 s; 11km/h=$\frac{55}{18}$ m/s;

$\frac{55}{18}$ m/s·144s = 440m; AT = 440m – 300m = 140 m.

6.



$\angle ABI \equiv \angle CBI$, $\angle ACI \equiv \angle BCI$,

m($\angle BAC$) = a^0. m ($\angle BIC$) = ?

A) $90^0 + \frac{a^0}{2}$ B) $90^0 - \frac{a^0}{2}$

C) $180^0 + \frac{a^0}{2}$ D) $180^0 - \frac{a^0}{2}$ E) 90^0

Prof. Delia Badea , Şcoala "*Take Ionescu*", Rm. Vâlcea

Soluţie: m ($\angle BIC$) = 90^0+ m ($\angle BAC$) :2 = $90^0 + \frac{a^0}{2}$.

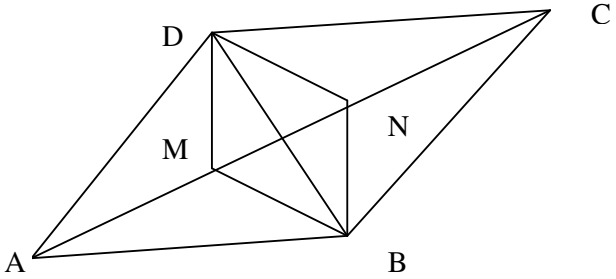
Subiectul III

7.

[DM] ≡ [MB] ≡ [BN] ≡ [DN]

[AM] ≡ [MN] ≡ [NC]

$\frac{S_{BNDM}}{S_{BCDN}} = ?$



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$

D) 1 E) 2

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: ABCD= romb → BNDM= romb. Fie {O}=AC∩BD.

$S_{BNDM}=2\cdot S_{DMN}=MN\cdot DO=CN\cdot DO=2\cdot S_{CDN}=S_{BCDN} \rightarrow \frac{S_{BNDM}}{S_{BCDN}} = 1.$

8.

$9x^2-12x-5=(mx+n)(px+q)$ $\qquad m^{n+p+q} = ?$

A) $\frac{1}{9}$; B) 3 C) 9 D) 1 E) $\frac{1}{3}$

Prof. Cristina Pîrvuţă, Şcoala Nr. 10 , Rm. Vâlcea

Soluţie: $9x^2-12x-5 = (3x+1)(3x-5) =(mx+n)(px+q) \rightarrow m=3, n=1, p=3, q=-5 \rightarrow m^{n+p+q} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$

9. $x^2 + x + 4y^2 - 2y = -\frac{1}{2}$; $8xy = ?$

A) 2 B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) - 2

Prof. Maria Vasilescu , Şcoala "*Take Ionescu*", Rm. Vâlcea

Soluţie: $x^2 + x + 4y^2 - 2y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2y-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow (x;y) = (-\frac{1}{2};\frac{1}{4}) \Rightarrow 8xy = -1.$

International Mathematical
"THE CLOCK – TOWER SCHOOL"
Contest
15th Edition 24.03.2012
Râmnicu Vâlcea
PROBA "*LA CEAS*"
CLASA a VIII-a

Subiectul I

1. $0{,}15a^2 = \dfrac{b^2}{1{,}(6)}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-6} = ?$

A) $\dfrac{1}{16}$; B) 0,015625 C) 0,001 D) 1,1 E) $\dfrac{2}{625}$

Prof. Delia Badea , Şcoala "*Take Ionescu*", Rm. Vâlcea

Soluţie: $\dfrac{b^2}{a^2} = 0{,}15 \cdot 1{,}(6) = 0{,}25;$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-6} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{6} = \left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)^{3} = 0{,}25^3 = 0{,}015625.$

2.

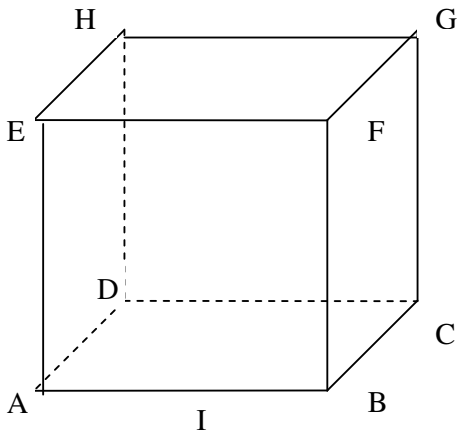
$a = \sqrt{x^2 - 5{,}5x + 7{,}5625} - \sqrt{x^2 - 2{,}5x + 1{,}5625},$ $x \in (0;1{,}25).$ $a = ?$

$A)\sqrt{6}$ $B)4$ $C)1{,}5$ $D)\sqrt{9{,}1350}$ $E)-2$

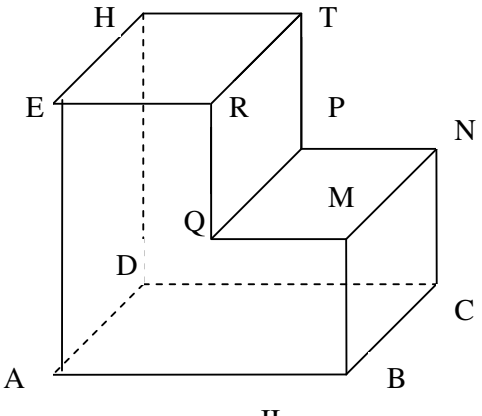
Prof. Cătălin Badea, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: a=$|x-2{,}75|-|x-1{,}25|$. Cum 0<x<1,25, rezultă a= - (x-2,75)+(x-1,25)= 1,5.

3.



I



II

AB=BC=CG=GH=HE=EF=FG=FB=HD=AE=AD=CD; S_I = 384 m^2

M∈ (BF), N∈ (CG), R∈ (EF), T∈ (GH)

BM=MF=CN=NG=ER=RF=HT=TG=MQ=NP=RQ=TP; S_{II} = ?

A) 352 m^2 B) 406 m^2 C) 532 m^2 D) 384 m^2 E)328 m^2

Prof. Mazilu Marin, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $S_{II}=S_I - 2\cdot S_{NGTP}=384m^2 - 2\cdot 16m^2=352m^2$.

Subiectul II

4. $\sqrt{\frac{2}{3}(\frac{a}{b}+1)^2}=\frac{c}{d}-4$; $a,b,c,d\in Z^*$. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=?$

A) $\sqrt{6}$ B) $4-\sqrt{6}$ C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ D) -5 E) 3

Insp. Ileana Florentina Dicu , I.S.J. Vâlcea

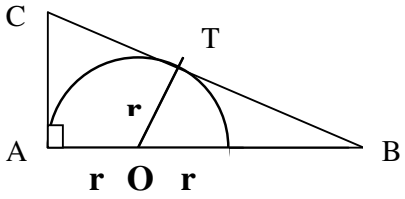
Soluţie:

$\sqrt{\frac{2}{3}(\frac{a}{b}+1)^2}=\frac{c}{d}-4\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left|\frac{a}{b}+1\right|=\frac{c}{d}-4.$

Cum $\left|\frac{a}{b}+1\right|\in Z,\frac{c}{d}-4\in Z\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left|\frac{a}{b}+1\right|\in Z\Leftrightarrow\left|\frac{a}{b}+1\right|=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}=-1,respectiv\frac{c}{d}=4\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=3$

5.

AB=2a
AC=a
OT $\perp$ BC
r = ?



A) $\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot a}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}$ C) $\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot a}{2}$ D) $\frac{a}{3}$ E) 0,8 a

Prof. Gh. Radu, CNI "*Matei Basarab*" , Rm. Vâlcea

Soluţie:

sinB= $\frac{OT}{OB}=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow\frac{r}{2a-r}=\frac{a}{a\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{r}{2a-r+r}=\frac{a}{a\sqrt{5}+a}\Leftrightarrow\frac{r}{2a}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}\Rightarrow r=\frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}$

6. $n=\sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+1$. $n^2=?$

A) $\sqrt{6}$ B) 1 C) $2\sqrt{3}$ D) 7 E) 3

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Şc. "Take Ionescu" , Rm. Vâlcea

Soluţie: $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1;\sqrt{6-2(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1;n=\sqrt{3}\Rightarrow n^2=3.$

Subiectul III

7. $S + s = 87\pi$

$AT = 6\sqrt{3}$ c

$R \cdot r = ?$

The Mathematics Contest

„THE CLOCK – TOWER SCHOOL"

15th Edition

Râmnicu Vâlcea

23-25.03.2012

Juniors II

1. Se consideră tabloul de numere:

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

.....

a) Să se afle primul număr de pe rândul 2012;

b) Să se afle suma numerelor de pe rândul 2012;

c) Notăm cu a_i ultimul număr de pe linia *i*. Să se calculeze $a_1 + a_2 + ... + a_{2012}$. Generalizati!

Vlad NEACŞU – Rm. Vâlcea

BAREM:

a) Se observă că ultimul număr de pe linia *i* este $\frac{i(i+1)}{2}$ 1p

Ultimul număr de pe rândul 2011 este $\frac{2011 \cdot 2012}{2} = 2023066$

Deci primul număr de pe rândul 2012 este 2023066 + 1 = 2023067.....1p

b) Primul număr de pe rândul 2012 este 2023067

Ultimul număr de pe rândul 2012 este $\frac{2012 \cdot 2013}{2} = 2025078$ 1p

Suma numerelor va fi

$S = 2023067 + 2023068 + ... + 2025078 = (1 + 2 + 3 + ... + 2025078) - (1 + 2 + 3 + ... + 2023066) =$

$= \frac{2025078 \cdot 2025079}{2} - \frac{2023066 \cdot 2023067}{2} = = 4\ 072\ 433\ 870$.....1p

c) $S = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + ... + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$S = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + ... + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + ... + n^2 + n}{2}$

$S = \frac{(1 + 2 + 3 + ... + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)}{2} = \frac{\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}}{2}$

$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 2p

Pt n=2012 avem S = 1 359 502 364.....1p

2. Se consideră u

ia un punct E, astfe

$[BD] \equiv [CE]$.

BAREM:

VARIANTA I

Fie $DD' \perp BC$ .....

$\Delta DD'F \equiv \Delta EE'F$ ....

$[DD'] \equiv [EE']$ .....

$\Delta BDD' \equiv \Delta CEE' \Rightarrow$

VARIANTA a II-a